Platonische Körper

Vortrag von Annamaria Jahn
Im Proseminar Lehramt am 11.12.2006
Kontakt: annamaria.jahn@online.de

1 Die fünf platonischen Körper

Ein platonischer Körper ist ein Polyeder mit zueinander kongruenten regelmäßigen Vielecken als Seitenflächen, bei dem die Ecken von gleich vielen Kanten gebildet werden (und unter sich gleiche Flächenwinkel einschließen).

Körper	Seitenflächen	Anzahl der			Flächen
		Flächen	Kanten	Ecken	pro Ecke
Tetraeder	gleichseitige Dreiecke	4	6	4	3
Hexaeder	Quadrate	6	12	8	3
Oktaeder	gleichseitige Dreiecke	8	12	6	4
Dodekaeder	regelmäßige Fünfecke	12	30	20	3
Ikosaeder	gleichseitige Dreiecke	20	30	12	5

1.1 Tetraeder

Tetraeder (griech.): tetráedron = Vierflächner
Das Tetraeder ist ein Körper mit vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Flächen, sechs gleichlangen Kanten und vier Ecken, in denen jeweils drei Flächen zusammentreffen.

1.1.1 Formeln

Seitenfläche	$A = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$
Oberfläche	$O = \sqrt{3} \cdot a^2$
Höhe	$h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$
Volumen	$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot A = \frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot a^3$
Umkugelradius	$R_U = \frac{1}{4}\sqrt{6} \cdot a$
Inkugelradius	$R_I = \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot a$

Der Tetraederwinkel:
Die Verbindungsstrecken zwischen dem Tetraedermittelpunkt und zwei Ecken schließen jeweils einen Winkel ein, der als Tetraederwinkel τ bezeichnet wird ($\tau = \arccos(-\frac{1}{3})$).

1.1.2 Symmetrie

Das Tetraeder hat

- vier dreizählige Drehachsen (durch die Ecken und die Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen)

- drei zweizählige Drehachsen (durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten)
- sechs Symmetrieebenen (jeweils durch eine Kante und senkrecht zur gegenüberliegenden Kante)

Die Tetraedergruppe hat 24 Elemente. Sie ist Untergruppe der Oktaedergruppe.

Die 24 Permutationsmöglichkeiten setzen sich zusammen aus 12 Drehungen:

- die identische Abbildung
- 8 Drehungen um 120° (4 dreizählige Drehachsen, 2 Möglichkeiten für den Drehsinn)
- 3 Drehungen um 180° (drei zweizählige Drehachsen),

sowie 12 Spiegelungen:

- 6 Ebenenspiegelungen (an 6 Symmetrieebenen)
- 6 Drehspiegelungen (Ebenenspiegelungen, jeweils kombiniert mit einer nachfolgenden 90°-Drehung)

1.1.3 Beziehungen zu anderen Polyedern

- Dualtität

  Das Tetraeder ist zu sich selbst dual (durch Verbinden der Flächenmittelpunkte erhält man wieder ein Tetraeder), wobei sich das duale Tetraeder in (verkleinerter) zentralsymmetrischer Lage befindet.

- umschreibender Würfel

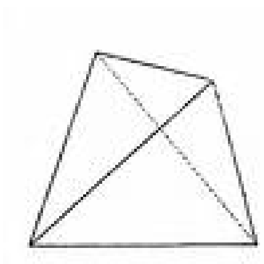
  Das Tetraeder kann so in einen Würfel einbeschrieben werden, dass seine Ecken zugleich Würfelecken und seine sechs Kanten Diagonalen der Würfelflächen sind. Das Volumen dieses Würfels ist das Dreifache des Tetraedervolumens ($a = d_W$; $a_W = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a$; $V_W = \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot a^3$).

- einbeschriebenes Oktaeder

  Dual dazu kann das Tetraeder einem Oktaeder so umbeschrieben werden, dass vier der Oktaederflächen in den Begrenzungsflächen des Tetraeders liegen und die sechs Ecken des Oktaeders die Mittelpunkte der sechs Tetraederkanten sind.

- quadratische Schnittfläche

  Das regelmäßige Tetraeder kann so in zwei Teile geschnitten werden, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist. Die Teile sind kongruent.



1.2 Hexaeder

Hexaeder (griech.): hexáedron = Sechsflächner
Das Hexaeder (auch als Würfel bekannt) ist ein Körper mit sechs kongruenten Quadraten als Flächen, zwölf gleichlangen Kanten und acht Ecken, in denen jeweils drei Flächen zusammentreffen.

1.2.1 Formeln

Seitenfläche	$A = a^2$
Oberfläche	$O = 6a^2$
Volumen	$V = a^3$
Länge der Raumdiagonalen	$d = \sqrt{3} \cdot a$
Umkugelradius	$R_U = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$
Innenkugelradius	$R_I = \frac{1}{2}a$

1.2.2 Symmetrie

Das Hexaeder hat

- drei vierzählige Drehachsen (durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten)
- vier dreizählige Drehachsen (durch gegenüberliegende Ecken)
- sechs zweizählige Drehachsen (durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten)
- neun Spiegelebenen (sechs Ebenen durch jeweils vier Ecken, drei Ebenen durch je vier Kantenmittelpunkte)
- drei vierzählige Drehspiegelachsen (durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten)
- vier dreizählige Drehspiegelachsen (durch gegenüberliegende Ecken)
- eine Punktsymmetrie zum Zentrum

Die Würfelgruppe hat 48 Elemente.

1.2.3 Beziehungen zu anderen Polyedern

- Dualität
  Das Hexaeder ist zum Oktaeder dual.
- einbeschriebenes Tetraeder
- weitere Körper mit der Oktaedergruppe, konstruiert aus Würfel und Oktaeder:
  - den abgestumpften Würfel mit 6 Achtecken und 8 Dreiecken
  - das Kuboktaeder mit 6 Quadraten und 8 Dreiecken, also 14 Seiten
  - das abgestumpfte Oktaeder mit 6 Quadraten und 8 Sechsecken
  - das Rhombendodekaeder mit 12 Rhomben als Seiten

1.3 Oktaeder

Oktaeder (griech.): oktáedron = Achtflächner
Das Oktaeder ist ein Körper mit acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Flächen, zwölf gleich langen Kanten und sechs Ecken, in denen jeweils vier Flächen zusammentreffen.

1.3.1 Formeln

Seitenfläche	$A = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$
Oberfläche	$O = 8 \cdot A = 2\sqrt{3} \cdot a^2$
Höhe	$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a$
Volumen	$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot a^2 = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot a^3$
Umkugelradius	$R_U = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a$
Inkugelradius	$R_I = \frac{1}{6}\sqrt{6} \cdot a$

1.3.2 Symmetrie

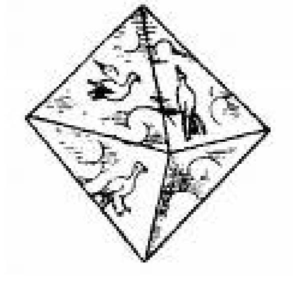
Das Oktaeder hat

- drei vierzählige Drehachsen (durch gegenüber liegende Ecken)
- vier dreizählige Drehachsen (durch die Mittelpunkte gegenüber liegender Flächen)
- sechs zweizählige Drehachsen (durch die Mittelpunkte gegenüber liegender Kanten)
- neun Symmetrieebenen (drei Ebenen durch je vier Ecken, sechs Ebenen durch jeweils zwei Ecken und zwei Kantenmittelpunkte)
- eine Punktsymmetrie zum Zentrum

Die Oktaedergruppe ist gleich der Würfelgruppe (48 Elemente).

1.3.3 Beziehungen zu anderen Polyedern

- Dualität
  Das Oktaeder ist zum Hexaeder dual.
- reguläres Sterntetraeder
- weitere Körper mit der Würfelgruppe, konstruiert aus Würfel und Oktaeder

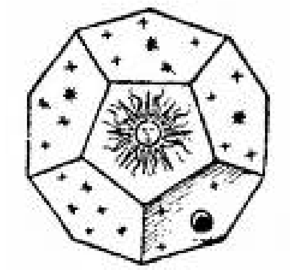


1.4 Dodekaeder

Dodekaeder (griech.): dodekáedron = Zwölfflächner

1.4.1 Formeln

Seitenfläche	$A = \frac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2$
Oberfläche	$O = 12 \cdot A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2$
Fünfeck-Höhe	$h = \frac{1}{2}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} \cdot a$
Volumen	$V = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot R_I \cdot A = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right) \cdot a^3$
Umkugelradius	$R_U = \frac{1}{4}\sqrt{6(3 + \sqrt{5})} \cdot a$
Inkugelradius	$R_I = \frac{1}{20}\sqrt{5(50 + 22\sqrt{5})} \cdot a$



1.4.2 Symmetrie

Das Dodekaeder hat

- sechs fünfzählige Drehachsen (durch gegenüber liegende Flächenmittelpunkte)
- zehn dreizählige Drehachsen (durch gegenüber liegende Ecken)
- fünfzehn zweizählige Drehachsen (durch Mittelpunkte gegenüber liegender Kanten)
- fünfzehn Symmetrieebenen (durch gegenüber liegende und parallele Kanten)
- eine Punktsymmetrie zum Zentrum

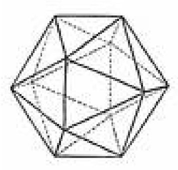
Die Dodekaedergruppe hat 120 Elemente.

1.4.3 Beziehungen zu anderen Polyedern

- Dualität
  Das Dodekaeder ist zum Ikosaeder dual.
- Weitere Körper mit der Dodekaedergruppe, konstruiert aus Dodekaeder und Ikosaeder:
  - das abgestumpfte Dodekaeder mit 12 Zehnecken und 20 Dreiecken
  - das Ikosidodekaeder mit 12 Fünfecken und 20 Dreiecken
  - das abgestumpfte Ikosaeder mit 12 Fünfecken und 20 Sechsecken
  - das Rhombentriakontaeder mit 30 Rhomben als Flächen
- einbeschriebener Würfel
  Aus den Kanten des Dodekaeders kann man drei Paare gegenüber liegender Kanten so auswählen, dass diese Paare drei kongruente, zueinander paarweise orthogonale Quadrate aufspannen. Die restlichen acht Ecken bilden die Ecken eines (dem Dodekaeder eingeschriebenen) Würfels. Insgesamt gibt es fünf derartige Positionen.

1.5 Ikosaeder

Ikosaeder (griech.): eikosáedron = Zwanzigflächner
Das Ikosaeder ist ein Körper mit zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Flächen, dreißig gleich langen Kanten und zwölf Ecken, in denen jeweils fünf Flächen zusammentreffen.



1.5.1 Formeln

Seitenfläche	$A = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$
Oberfläche	$O = 20 \cdot A = 5\sqrt{3} \cdot a^2$
Volumen	$V = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot R_I \cdot A = \frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot a^3$
Umkugelradius	$R_U = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot a$
Inkugelradius	$R_I = \frac{1}{12}\sqrt{3}(3 + \sqrt{5}) \cdot a$

1.5.2 Symmetrie

Das Ikosaeder hat

- sechs fünfzählige Drehachsen (durch gegenüber liegende Ecken)
- zehn dreizählige Drehachsen (durch Mittelpunkte gegenüber liegender Flächen)
- fünfzehn zweizählige Drehachsen (durch Mittelpunkte gegenüber liegender Kanten)
- fünfzehn Symmetrieebenen (durch gegenüber liegende und parallele Kanten)
- eine Punktsymmetrie zum Zentrum

Die Ikosaedergruppe ist gleich der Dodekaedergruppe (120 Elemente).

1.5.3 Beziehungen zu anderen Polyedern

- Dualität

  Das Ikosaeder ist zum Dodekaeder dual.

- Weitere Körper mit der Ikosaedergruppe, konstruiert aus Dodekaeder und Ikosaeder

- umschreibender Würfel

  Unter den Kanten des Ikosaeders können drei Paare gegenüber liegender (also insgesamt sechs) Kanten so auswählt werden, dass diese Paare drei kongruente zueinander paarweise orthogonale Rechtecke aufspannen. (Goldener Schnitt)

- umschreibendes Oktaeder

  Die 24 restlichen Kanten begrenzen 8 Dreiecke, die in den Flächen eines umschriebenen Oktaeders liegen, wobei die Ecken des Ikosaeders auf dessen Kanten liegen. Insgesamt gibt es fünf derartige Positionen.

2 Eigenschaften

Grundlegende Eigenschaften der Platonischen Körper

2.1 Eulerscher Polyedersatz

Seien E die Anzahl der Ecken, F die Anzahl der Flächen und K die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, dann gilt:
$E + F - K = 2$

2.2 Anzahl

Es gibt nur genau diese fünf Typen von platonischen Körpern.
Der Beweis dafür findet sich schon bei Euklid:
Bei einem Polyeder ist die Summe der Innenwinkel der an einer Ecke aufeinander treffenden Flächen kleiner als 360°. Wäre sie genau 360°, würden die Flächen in einer Ebene liegen; auch bei mehr als 360° wäre keine Ecke möglich. Andererseits müssen sich an jeder Ecke eines Polyeders mindestens drei Flächen treffen.
Sind bei einem Körper alle Seitenflächen

- gleichseitige Dreiecke (Innenwinkel 60°), können an einer Ecke drei, vier oder fünf Dreiecke zusammen treffen (Winkelsumme 180°, 240°, 300°).
- Quadrate (Innenwinkel 90°), können an einer Ecke drei zusammen treffen (Winkelsumme 270°).
- regelmäßige Fünfecke (Innenwinkel 108°), können an einer Ecke drei zusammen treffen (Winkelsumme 324°).

Konstruktion eines Ikosaeders:
Man bildet zu einem Fünfeck ein Antiprisma. Setzt man auf die Basis und auf die Deckfläche jeweils eine fünfseitige Pyramide auf, so erhält man das Ikosaeder mit 12 Ecken und 20 gleichseitigen Dreiecken.
Das Dodekaeder ergibt sich als duales Polyeder.
Diese fünf platonischen Körper sind einzigen konvexen Körper dieser Art.
Weitere Polyeder mit regelmäßigen Vielecken als Seitenflächen ergeben sich nur, wenn Vielecke mit unterschiedlicher Eckenzahl zugelassen werden (archimedische Körper), sowie Körper, bei denen nicht an jeder Ecke gleich viele Vielecke zusammentreffen.

2.3 Dualität

Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines platonischen Körpers, so erhält man (mit den Verbindungslinien als Kanten) wieder einen platonischen Körper mit demselben Mittelpunkt. Dieser Körper wird als Dualkörper zum Ausgangskörper bezeichnet.
Konstruiert man den zum Dualkörper dualen Körper, so erhält man einen (verkleinerten) platonischen Körper des Ausgangstyps mit gleichem Mittelpunkt.

2.4 Symmetrie

Die platonischen Körper zeigen größtmögliche Symmetrie:
Die Symmetriegruppe wirkt transitiv auf den Ecken, Kanten, Flächen und auf Fahnen. Duale platonische Körper haben dieselbe Symmetriegruppe. Daher gibt es drei dieser Gruppen: die Tetraedergruppe, die Oktaedergruppe und die Ikosaedergruppe.

2.5 Berührende Kugeln

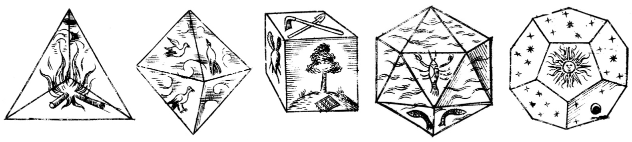
Jeder platonische Körper hat eine Inkugel, die alle seine Flächen berührt, eine Umkugel, auf der alle seine Ecken liegen, sowie eine Kantenkugel, auf der die Mittelpunkte der Kanten liegen. Der gemeinsame Mittelpunkt dieser drei Kugeln ist das Zentrum des platonischen Körpers.

2.6 Platonische Körper als reguläre Parkettierungen der Sphäre

Projiziert man die Kanten eines platonischen Körpers aus dem Mittelpunkt auf eine Kugel mit demselben Mittelpunkt, so erhält man eine Parkettierung der Kugeloberfläche durch zueinander kongruente regelmäßige sphärische Vielecke, wobei in jeder Ecke gleich viele Kanten (unter gleichen Winkeln) zusammentreffen. Diese Parkettierungen haben dieselben Symmetrien und dieselben Dualitätsbeziehungen wie die Ausgangskörper.

3 Geschichtliches

Den Pythagoräern (6.Jh.v.Chr.) waren Tetraeder, Würfel, und Dodekaeder bekannt. Theaitetos (4.Jh.v.Chr.) kannte auch Oktaeder und Ikosaeder, wobei das Oktaeder vermutlich vorher nur deshalb nicht beachtet wurde, weil es als Doppelpyramide gesehen wurde. Der griechische Philosoph Platon (um 300 v.Chr.) hat die Körper ausführlich beschrieben und sie den Elementen des platonischen Weltbildes zugeordnet.



4 Vorkommen

- Spielwürfel (Glücksspiele)
- Kunst
- Natur

  Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Dodekaeder kommen in der Natur als (idealisierte) Kristalle vor (Kochsalz und Alaun bilden Würfelkristalle; reines Alaun kristallisiert als Oktaeder).

  Mineralien können mehrere kubische Formen annehmen (Pyrit kommt sowohl als Würfel, als auch als Oktaeder oder Dodekaeder vor).

  Das Ikosaeder ist eine Strukturform, wie sie bei Clustern beobachtet wird.